INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES
STATISTICIENS ÉCONOMISTES
À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1979. — Option MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

NOTA :

1° Le symbole Log x désigne le logarithme népérien de x.

2° Le nombre de combinaisons de k objets pris parmi n objets est noté C_n^k. Les candidats peuvent, s'ils le désirent, utiliser la notation $\binom{n}{k}$ à la place de C_n^k.

3° La partie II est complètement indépendante de la partie I. Par contre, les parties III, IV et V doivent être traitées dans l'ordre du texte, et ne peuvent l'être qu'après étude des parties I et II.

4° Dans tout le problème, le corps de base est celui des nombres réels. En conséquence, les suites ou séries intervenant dans le texte sont des suites ou séries réelles, sans qu'il soit nécessaire de le préciser à chaque fois.

PARTIE I

1° On pose, pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}},$$

$$b_n = \operatorname{Log} a_n.$$

Montrer que la suite (b_n) est convergente : on devra pour cela étudier la série de terme général :

$$t_n = b_{n-1} - b_n.$$

En déduire que si $n \to +\infty$, $a_n \to l$, où $l > 0$ *strictement*.

2° Soit, pour n entier positif ou nul, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx.$$

Former une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2}. Calculer I_0 et I_1. En déduire, p désignant un entier positif ou nul, des expressions de I_{2p} et de I_{2p+1}.

3° Montrer que, quel que soit l'entier positif ou nul p,

$$I_{2p+2} < I_{2p+1} < I_{2p}.$$

En déduire que :

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1.$$

À l'aide du résultat précédent, établir que :

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{[2 \cdot 4 \ldots (2p)]^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)]^2 (2p+1)} = \frac{\pi}{2} \text{ (formule de Wallis).}$$

4° Utiliser la formule de Wallis pour calculer le nombre l dont l'existence a été établie à la fin de la première question. On trouvera que :

$$l = \sqrt{2\pi}.$$

.../...

Partie II

1° Soient :

— (ε_n) une suite de limite 0 lorsque $n \to + \infty$;

— α un réel strictement supérieur à 1.

On pose, si $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{\varepsilon_n}{n^\alpha}.$$

La série de terme général u_n est convergente, soit :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Montrer que :

$$R_n = \frac{\varepsilon'_n}{n^{\alpha-1}},$$

(ε'_n) désignant une nouvelle suite de limite 0 lorsque $n \to + \infty$.

2° Soient maintenant :

(ε_n) une suite de limite 0 lorsque $n \to + \infty$,

p un entier fixe positif ou nul, et $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des réels fixes, en nombre $(p+1)$,

α un réel strictement supérieur à 1.

On pose, si $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{\lambda_0}{n^\alpha} + \frac{\lambda_1}{n^{\alpha+1}} + \ldots + \frac{\lambda_m}{n^{\alpha+m}} + \ldots + \frac{\lambda_p}{n^{\alpha+p}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{\alpha+p}}.$$

La série de terme général u_n est convergente, soit :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Montrer qu'il existe des réels fixes $\mu_0, \mu_1, \ldots . \mu_p$ tels que :

$$R_n = \frac{\mu_0}{n^{\alpha-1}} + \frac{\mu_1}{n^\alpha} + \ldots + \frac{\mu_m}{n^{\alpha+m-1}} + \ldots + \frac{\mu_p}{n^{\alpha+p-1}} + \frac{\varepsilon'_n}{n^{\alpha+p-1}},$$

(ε'_n) désignant une nouvelle suite de limite 0 lorsque $n \to + \infty$.

Indiquer un procédé permettant de calculer les coefficients μ_m en fonction des coefficients λ_m et de α.

On pourra pour cela poser :

$$a_n = \frac{\mu_0}{n^{\alpha-1}} + \frac{\mu_1}{n^\alpha} + \ldots + \frac{\mu_p}{n^{\alpha+p-1}},$$

et déterminer les coefficients $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p$ de façon que si l'on pose :

$$v_n = u_n + a_n - a_{n-1},$$

on ait :

$$v_n = \frac{\varepsilon'_n}{n^{\alpha+p}}, \qquad \lim_{n \to + \infty} \varepsilon'_n = 0.$$

3° *Application numérique.*

Posons :

$$u_n = 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Calculer $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que :

$$u_n = \frac{\lambda_0}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{\lambda_1}{n^{\frac{5}{2}}} + \frac{\lambda_2}{n^{\frac{7}{2}}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{\frac{7}{2}}} \text{ avec } \lim_{n \to + \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Déterminer ensuite μ_0, μ_1, μ_2 tels que :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \frac{\mu_0}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{\mu_1}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_2}{n^{\frac{5}{2}}} + \frac{\varepsilon'_n}{n^{\frac{5}{2}}} \text{ avec } \lim_{n \to + \infty} \varepsilon'_n = 0.$$

. . . / . . .

Partie III

1° On pose, les notations étant celles de la partie I,

$$a'_n = \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}}, \qquad b'_n = \text{Log } a'_n .$$

On a donc, d'après les résultats de la partie I,

$$\lim_{n \to +\infty} b'_n = 0 .$$

Montrer que :

$$b'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t_k .$$

2° En utilisant la partie II, montrer que b'_n admet un développement limité à n'importe quel ordre selon les puissances de $\frac{1}{n}$. Calculer les réels μ_0, μ_1, μ_2 tels que :

$$b'_n = \frac{\mu_0}{n} + \frac{\mu_1}{n^2} + \frac{\mu_2}{n^3} + \frac{\varepsilon'_n}{n^3} \quad \text{avec} \lim_{n \to +\infty} \varepsilon'_n = 0 .$$

En déduire que :

$$\text{Log } (n\,!) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \text{Log } n - n + \frac{1}{2} \text{Log } (2\pi) + \frac{\mu_0}{n} + \frac{\mu_1}{n^2} + \frac{\mu_2}{n^3} + \frac{\varepsilon'_n}{n^3} .$$

Partie IV

Dans cette partie et dans la suivante, r est un entier *fixe* positif ou nul, p un entier *fixe* strictement positif.

On pose :

$$S_{p,r}(n) = \sum_{k=0}^{k=n} \text{Log } [(pk + r)\,!] .$$

Montrer, en employant notamment la partie III, qu'il existe des réels $A_{p,r}$; $B_{p,r}$; $C_{p,r}$; $D_{p,r}$; $E_{p,r}$; $F_{p,r}$ tels que :

$$S_{p,r}(n) = A_{p,r} \cdot n^2 \text{ Log } n + B_{p,r} \cdot n^2 + C_{p,r} \cdot n \text{ Log } n + D_{p,r} \cdot n + E_{p,r} \cdot \text{Log } n + F_{p,r} + \varepsilon_n , \text{ avec } \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0 .$$

On trouvera des expressions simples, que l'on explicitera, pour $A_{p,r}$; $B_{p,r}$; $C_{p,r}$; $D_{p,r}$; $E_{p,r}$. *On ne cherchera pas à calculer explicitement* $F_{p,r}$.

Partie V

On pose cette fois, les notations étant celles de la partie IV,

$$T_{p,r}(n) = \sum_{k=0}^{k=n} \text{Log } C_{pn+r}^{pk} .$$

Montrer, en utilisant la partie IV, que :

$$T_{p,r}(n) = A'_{p,r} \cdot n^2 + B'_{p,r} \cdot n \text{ Log } n + C'_{p,r} \cdot n + D'_{p,r} \cdot \text{Log } n + E'_{p,r} + \varepsilon'_n ,$$

où :

$$\lim_{n \to +\infty} \varepsilon'_n = 0 ;$$

$A'_{p,r}$; $B'_{p,r}$; $C'_{p,r}$; $D'_{p,r}$ ont des expressions simples, que l'on déterminera ;

$E'_{p,r}$ s'exprime à l'aide de $F_{p,r}$ et de $F_{p,0}$, la signification de $F_{p,r}$ étant celle précisée à la partie IV.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail